第 18 講　微分法・積分法(4)

1　関数 $f(x)$ は

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x^2+2x & (x\leqq 2\ \text{のとき}) \\ x-2 & (x>2\ \text{のとき}) \end{cases}$$

で定義されている．次の各問いに答えよ．

(1)　$y=f(x)$ のグラフをかけ．

(2)　$a\leqq x\leqq a+2$ における $f(x)$ の最大値が $f(a+2)$ と等しくなるような実数 a の値の範囲を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　定数 a $(a \neq 1)$ に対し，$f(x)=x^3-(a+2)x^2+(2a+1)x-a$ とする．

(1)　方程式 $f(x)=0$ の解を a を用いて表せ．

(2)　関数 $f(x)$ の極値を a を用いて表せ．

(3)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を a を用いて表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　関数 $f(x)=\int_0^1 |t^2-x^2|dt$ の最小値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 18 講　微分法・積分法(4)

放物線 $y=3x^2-12x$ $(m \leqq x \leqq m+2)$ と 3 直線 $y=0$, $x=m$, $x=m+2$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする．ただし，m は定数で $2<m<4$ とする．このとき，S は $m=$ ア $+\sqrt{\text{イ}}$ で最小値 ウエ $-$ オカ $\sqrt{\text{キ}}$ をとる．

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第18講　微分法・積分法(4)

1　関数 $f(x)$ は

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x^2+2x & (x \leqq 2 \text{ のとき}) \\ x-2 & (x>2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義されている．次の各問いに答えよ．

(1)　$y=f(x)$ のグラフをかけ．

(2)　$a \leqq x \leqq a+2$ における $f(x)$ の最大値が $f(a+2)$ と等しくなるような実数 a の値の範囲を求めよ．

---

(1)　$x \leqq 2$ のとき　$f'(x)=3x^2-6x+2$

$f'(x)=0$ となるのは　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{3}$　　$\alpha=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$，$\beta=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ とおく．

$x>2$ のとき　$f(x)$ は単調増加．

よって，$f(x)$ は連続であるから増減は右表．

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	↗		↘		↗	0	↗
		↑ 極大		↑ 極小			

ここで　$f(x)\div f'(x)$ を計算することにより

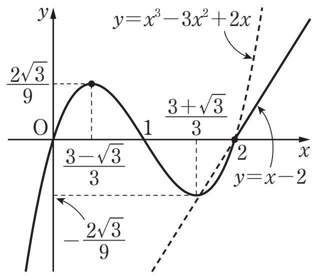
$$f(x)=(3x^2-6x+2)\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$$

$$f(\alpha)=(3\alpha^2-6\alpha+2)\left(\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{3}$$

$$=-\frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3}+\frac{2}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$f(\beta)=-\frac{2}{3}\beta+\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3}+\frac{2}{3}=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

よって，グラフは右図．



(2)　変域の幅が2であることを考慮し，$f(x)$ の最大値が $f(a+2)$ となるときを考える．

(i)　$a+2 \leqq \alpha$　つまり　$a \leqq -\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ のとき　$a \leqq x \leqq a+2$　においては

$x=a+2$ で最大値をとる．

(ii)　$x-2=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$　となる x を求めると　$x=2+\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

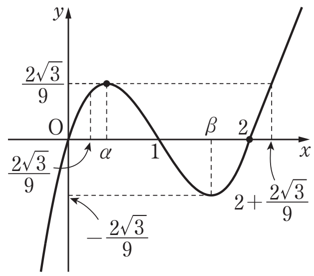
$2+\dfrac{2\sqrt{3}}{9} \leqq a+2$　のとき　$a \geqq \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

ここで　$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}-\alpha=\dfrac{5\sqrt{3}-9}{9}<0$　より　$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}<\alpha$

よって　$a=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ のとき　$x=\alpha$，$a+2$ で最大値をとり，

$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}<a$ のとき　$x=a+2$ で最大値をとる．また，$\alpha<a+2<2+\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ のときは

$x=a+2$ では最大値とならず不適．



(i)，(ii)より求める a の範囲は　$\boldsymbol{a \leqq -\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}}$，$\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{9} \leqq a}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 定数 a $(a \neq 1)$ に対し，$f(x)=x^3-(a+2)x^2+(2a+1)x-a$ とする．

(1) 方程式 $f(x)=0$ の解を a を用いて表せ．

(2) 関数 $f(x)$ の極値を a を用いて表せ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を a を用いて表せ．

(1) $f(x)=x^3-(a+2)x^2+(2a+1)x-a=0$

$(x-1)^2(x-a)=0$　　よって　$\boldsymbol{x=1,\ a}$

(2) $f'(x)=3x^2-2(a+2)x+(2a+1)=(x-1)\{3x-(2a+1)\}$

$f'(x)=0$ となるのは　$x=1,\ \dfrac{2a+1}{3}$

$\dfrac{2a+1}{3}<1$　つまり

$a<1$ のとき，極大値　$f\left(\dfrac{2a+1}{3}\right)=\left(\dfrac{2a-2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1-a}{3}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{4(a-1)^3}{27}}$　　**極小値　0**

$1<a$ のとき，極大値　$f(1)=\boldsymbol{0}$　　**極小値**　$\boldsymbol{-\dfrac{4(a-1)^3}{27}}$

(3) 求める図形の面積を S とすると

$a<1$ のとき　$S=\displaystyle\int_a^1 (x-1)^2(x-a)dx$

$$=\int_a^1 (x-1)^2\{(x-1)-(a-1)\}dx$$

$$=\int_a^1 \{(x-1)^3-(a-1)(x-1)^2\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}(x-1)^4-(a-1)\cdot\frac{(x-1)^3}{3}\right]_a^1$$

$$=-\frac{1}{4}(a-1)^4+\frac{1}{3}(a-1)^4=\frac{1}{12}(a-1)^4$$

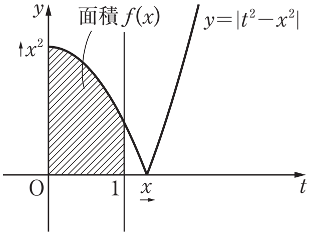
$1<a$ のとき　$S=-\displaystyle\int_1^a (x-1)^2(x-a)dx=\int_a^1 (x-1)^2(x-a)dx=\frac{1}{12}(a-1)^4$

よって，求める図形の面積は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{12}(a-1)^4}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　関数 $f(x)=\int_0^1 |t^2-x^2|dt$ の最小値を求めよ．



$f(x)=f(-x)$ より　$f(x)$ は偶関数．よって　$x\geqq 0$ で考える．
$x>1$ のときは右図より　$f(x)$ は単調増加である．
よって　$0\leqq x\leqq 1$ のときを考える．

$$f(x)=\int_0^x(-t^2+x^2)dt+\int_x^1(t^2-x^2)dt$$
$$=\left[-\frac{t^3}{3}+x^2t\right]_0^x+\left[\frac{t^3}{3}-x^2t\right]_x^1$$
$$=\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}$$
$$f'(x)=4x^2-2x=2x(2x-1)$$

よって増減は右表．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

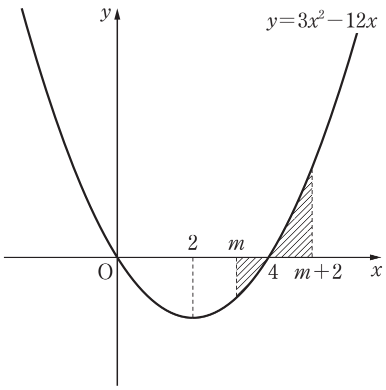
↑
最小値

以上より，最小値は　$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{1}{4}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 18 講　微分法・積分法(4)

放物線 $y=3x^2-12x$ $(m\leqq x\leqq m+2)$ と 3 直線 $y=0$，$x=m$，$x=m+2$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする．ただし，m は定数で $2<m<4$ とする．このとき，S は $m=$ ア $+\sqrt{\text{イ}}$ で最小値 ウエ $-$ オカ $\sqrt{\text{キ}}$ をとる．



$y=3x^2-12x=3x(x-4)$

$2<m<4$ より，S は右図斜線部分の面積である．

$$S=-\int_m^4(3x^2-12x)dx+\int_4^{m+2}(3x^2-12x)dx$$
$$=-\Big[x^3-6x^2\Big]_m^4+\Big[x^3-6x^2\Big]_4^{m+2}$$
$$=-\{64-96-(m^3-6m^2)\}$$
$$+\{(m+2)^3-6(m+2)^2-(64-96)\}$$
$$=2m^3-6m^2-12m+48$$

$f(m)=2m^3-6m^2-12m+48$　とおくと

$f'(m)=6m^2-12m-12$　　$m=1\pm\sqrt{3}$ のとき　$f'(m)=0$

よって　$f(m)$ の増減は右表のようになり，

m	2	$\cdots$	$1+\sqrt{3}$	$\cdots$	4
$f'(m)$		$-$	0	$+$	
$f(m)$		↘		↗	

↑
極小かつ最小

S は $m=\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{3}}$ で最小となる．

ここで　$f(m)\div f'(m)$ を計算することにより

$$f(m)=(6m^2-12m-12)\left(\frac{1}{3}m-\frac{1}{3}\right)-12m+44$$

$m=1+\sqrt{3}$ のとき　$f'(m)=6m^2-12m-12=0$　より

$f(1+\sqrt{3})=-12(1+\sqrt{3})+44=32-12\sqrt{3}$

よって，求める S の最小値は　$\mathbf{32-12\sqrt{3}}$（$m=1+\sqrt{3}$ のとき）

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。